Problème d'Analyse

Les deux tests comptent pour la moitié des points.

Notations

- On note $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ l'ensemble des entiers relatifs et des nombres réels respectivement, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs, et $\mathbb{N}^*$ celui des entiers strictement positifs.
- $[0,1)$ est l'ensemble des nombres $x \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq x < 1$. On pose $C = [0,1) \times [0,1)$.
- Tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ s'écrit de façon unique $v = [v] + \{v\}$, où $[v]$ est un élément de $\mathbb{Z}^2$ et $\{v\} \in C$; $[v]$ est appelé la **partie entière** de v et $\{v\}$ la **partie fractionnaire** de v.
- $M_2(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des matrices 2×2 avec des coefficients entiers.
- Pour $A \in M_2(\mathbb{Z})$, $T_A : C \to C$ est l'application définie par $T_A(v) = \{Av\}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit T_A^n par récurrence: $T_A^0 = I$ et $T_A^n = T_A \circ T_A^{n-1}$ pour $n > 0$.
- Un ensemble $E \subset C$ est **dense** dans C si tout disque euclidien $D \subset C$ de rayon strictement positif contient un point de E.

Partie I

I.1. Montrer que si $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$, alors $T_{AB} = T_A \circ T_B$.
I.2. Un **segment euclidien** de C est l'intersection de C avec un segment contenu dans une droite affine de $\mathbb{R}^2$. Montrer que si $\det(A) = 0$, alors l'image de T_A est l'union d'un nombre fini de segments de C.
I.3. Un point $v \in C$ est appelé T_A**-périodique** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_A^n v = v$. Montrer que si $\det(A) \neq 0$, l'ensemble des points périodiques de T_A est dense dans C. Hint: Observez que pour p un nombre premier qui ne divise pas $\det(A)$, l'application T_A induit une bijection de $C \cap \frac{1}{p}\mathbb{Z}^2$ dans lui-même.

Partie II

Dans cette partie, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La T_A**-orbite** *d'un point* $v \in C$ *est l'ensemble des points de la forme* $T_A^n(v)$*, où* $n \in \mathbb{N}$*. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe* $v \in C$ *dont la* T_A*-orbite est dense dans* C*.*

II.1. Montrer que pour tout $w \in \mathbb{Z}^2$ différent de l'origine, $A^n(w)$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Hint: Calculer les valeurs propres de A et observez que les vecteurs propres de A sont irrationnels.

II.2. Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ des fonctions continues qui sont $\mathbb{Z}^2$-**périodiques**, c'est à dire que $f(v + w) = f(v)$ et $g(v + w) = g(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ et tout $w \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que f et g sont limites uniformes de polynômes trigonométriques de la forme

$$P(v) = \sum_{w \in \mathbb{Z}^2} a_w \exp(2i\pi\ v \cdot w)$$

où a_w sont des nombres complexes qui s'annulent tous sauf un nombre fini, et où $v \cdot w$ représente le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

II.3. Déduire de II.1 et II.2 que les intégrales multiples

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) g(A^n(x, y)) dx dy$$

convergent lorsque n tend vers l'infini vers

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \right) \cdot \left(\int_0^1 \int_0^1 g(x, y) dx dy \right).$$

II.4. Montrer que pour tout disque euclidien $D \subset C$ de rayon strictement positif, l'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_A^{-n}(D)$ est dense dans C.

II.5. Montrer qu'il existe une suite $\{D_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de disques euclidiens $D_k \subset C$ de rayon strictement positif telle que tout disque euclidien $D \subset C$ de rayon strictement positif contient l'un des D_k.

II.6. Montrer par récurrence qu'il existe une suite $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de disques euclidiens fermés $E_k \subset C$ de rayons strictement positifs tels que $E_{k+1} \subset E_k$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un entier $n_k \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_A^{n_k}(E_k) \subset D_k$.

II.7. Conclure.